

ohne Kippung hatten wir uns davon überzeugt, daß unter diesen Bedingungen kein zusätzlicher Astigmatismus durch Verschmutzen des Blendenrandes erzeugt worden war.

Diese Arbeit wurde von der Deutschen Forschungsgemeinschaft, dem Fonds der Chemischen Industrie und der Badischen Anilin- & Sodaefabrik unterstützt. Für die hochherzige Förderung sprechen wir unseren besten Dank aus.

Messungen der Bildfehler eines elektrostatischen Sektorfeldes *

ALFRED BÄUML

2. Physikalisches Institut der Justus Liebig-Universität, Gießen

(Z. Naturforsch. 26 a, 1168—1174 [1971]; eingegangen am 21. April 1971)

Measurement of Image Aberrations of an Electrostatic Sector Field

The ion-optical properties of a cylinder-condenser (sector angle $\Phi=50^\circ$ and curvature radius of the middle equipotential surface $r_0=100$ mm) are investigated by an experimental ray-tracing technique.

A narrow electron beam entering the field under a known angle and at a known place is observed on the exit side of the field by means of a luminescent screen combined with a special microscope. The measurement of the lateral distances of this ray from the central beam in several distances behind the exit field-boundary yields the information about the imaging properties of the sector field. The analysis of the measurements indicates the existence of a third-order angular aberration. The experimentally determined values of second-order α -, u -, and δ -aberration-coefficients do not differ substantially from the theoretical ones.

Das elektrostatische Sektorfeld ist als Energieanalysator für geladene Teilchen seit langem in Gebrauch. Auch seine Fokussierungseigenschaften sind bekannt. In der allgemeineren Form des Toroidkondensators besitzt es verschiedene starke Fokussierungen in radialer und axialer Richtung, die durch die Wahl der radialen und axialen Krümmungen der mittleren Äquipotentialfläche zwischen den Elektroden bestimmt werden. Der Zylinderkondensator und der Kugelkondensator sind daher Spezialfälle des Toroidkondensators. Die Bildfehler des Toroidkondensators wurden von EWALD und LIEBL¹ in zweiter Näherung berechnet. WOLNIK² ergänzte diese Berechnungen, indem er auch die Streufeld-einflüsse an den Feldgrenzen miteinbezog.

Das Ziel der vorliegenden Arbeit war es, die Bildfehler eines Zylinderkondensators zu messen und mit den Ergebnissen der Theorie² zu vergleichen.

Prinzip der Messung

Über Bildfehlermessungen an magnetischen Sektorfeldern wurde von mehreren Autoren berichtet^{3—5}. Die Bildfehler des elektrostatischen Sektor-

feldes wurden bisher noch nicht systematisch experimentell untersucht.

An Hand von Abb. 1 soll das Prinzip der Messung erläutert werden.

Ein fein ausgeblendeter Elektronenstrahl wird zunächst so in den Zylinderkondensator eingeschossen, daß er die kreisförmige geometrische Mittelbahn mit dem Radius r_0 zwischen den Elektroden durchläuft. Die zugehörige Potentialfläche soll auf Erdpotential liegen, die Feldstärke auf der Mittelbahn sei E_0 . Damit die Elektronen der Energie $e U_0$ sich auf dieser Kreisbahn bewegen können, muß die Bedingungsgleichung

$$M v^2/r_0 = e E_0 = 2 e U_0/r_0 \quad (1)$$

erfüllt sein. Die Potentiale der Zylinderelektroden ergeben sich aus der Beziehung

$$U(r) = r_0 E_0 \ln(r_0/r). \quad (2)$$

M , v und e bedeuten die Masse, die Geschwindigkeit und die Ladung des Elektrons. Die leichte relativistische Massenzunahme der Elektronen bei der Beschleunigungsspannung $U_0 = 10$ kV wurde berücksichtigt.

³ M. BARIL u. L. KERWIN, Canad. J. Phys. 43, 1657 [1965].

⁴ S. PENNER u. J. W. LIGHTBODY, Proc. of the International Symposium on Magnet Technology 1965, S. 154 ff.

⁵ J. CAMPLAN u. R. MEUNIER, Nucl. Instr. Meth. 57, 251 [1967].

⁶ R. HERZOG, Phys. Z. 41, 18 [1940].



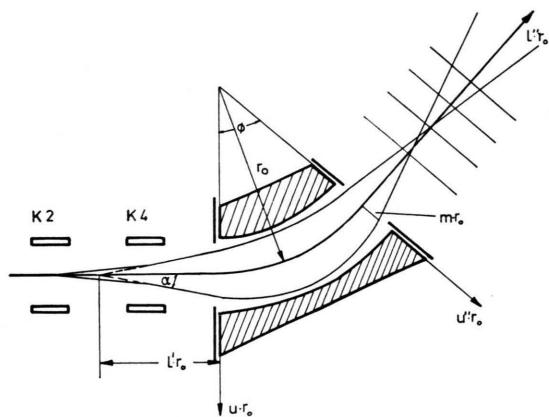


Abb. 1. Prinzip der Bildfehlermessung. l' , u , u'' und l'' werden in Einheiten von r_0 gemessen. Die Geraden parallel zur hinteren Feldgrenze deuten verschiedene Positionen des Leuchtschirms während der Messung an.

Die geerdeten Streufeldblenden⁶ sind so angebracht, daß die idealen Feldgrenzen mit den Stirnflächen der Sektorelektroden zusammenfallen. Durch zwei vor dem Feld befindliche Einschußkondensatoren K 2 und K 4 kann der einlaufende Strahl so abgelenkt werden, daß er oder seine rückwärtige Verlängerung den Mittelstrahl in der Entfernung $l' r_0$ vor der vorderen Feldgrenze unter dem Winkel α schneidet. Durch passende Wahl der Feldstärken in den beiden Kondensatoren kann man auch Strahlen herstellen, die auf der Eintrittsseite im Abstand $u r_0$ parallel zum Mittelstrahl verlaufen.

In verschiedenen Entfernungen $l'' r_0$ von der hinteren Feldgrenze werden die Abstände der Seitenstrahlen vom Mittelstrahl mit einem Leuchtschirm und einem speziellen Meßmikroskop gemessen. Man kann nun durch die zusammengehörigen Meßpunkte Ausgleichsgeraden legen und erhält so für jeden

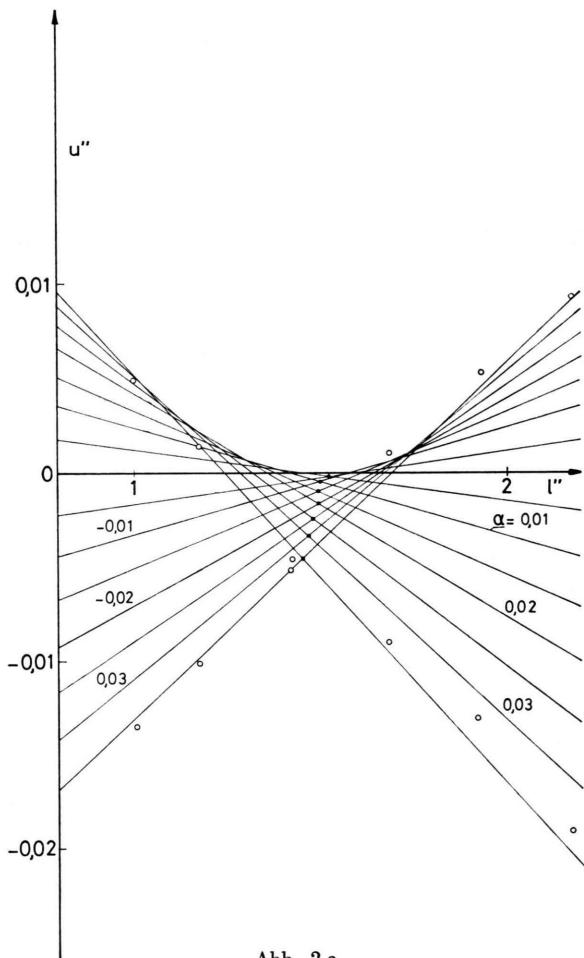


Abb. 2 a.

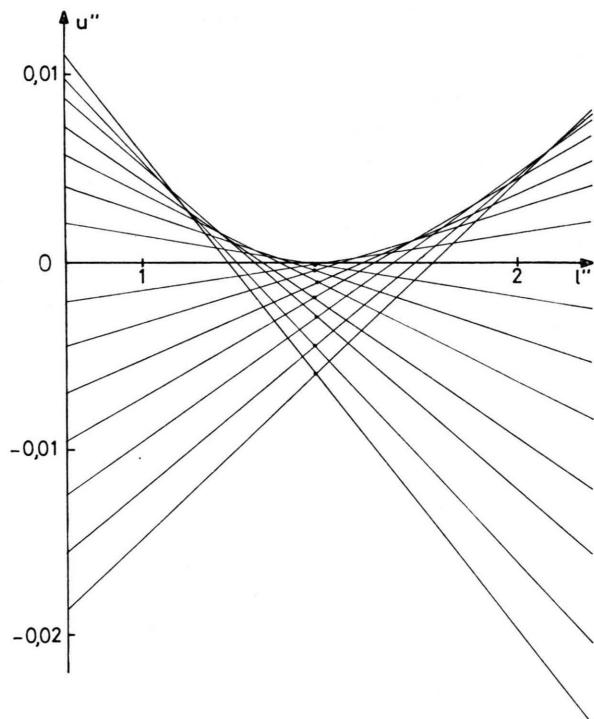


Abb. 2 b.

Abb. 2. Strahldiagramme. a) Ergebnis einer Messung für $l' = 0,75$ und die angeschriebenen Einschußwinkel α . Für die beiden Strahlen mit den größten Einschußwinkeln sind jeweils 6 von 8 gemessenen Punkten eingezeichnet. Die restlichen Punkte liegen rechts außerhalb des Bildrandes. b) Für dieselben Einschußparameter nach der Theorie² berechnet.

Seitenstrahl eine Geradengleichung

$$u''(l'') = m + n l''.$$

$m r_0$ ist der seitliche Abstand des Seitenstrahls vom Mittelstrahl beim Durchlaufen der idealen Austrittsfeldgrenze, n ist die Steigung der Geraden.

Das unmittelbare experimentelle Ergebnis einer Messung ist ein Strahlendiagramm. Abb. 2 a zeigt als Beispiel ein solches, bei dem nur α variiert wurde. Darunter (Abb. 2 b) ist das Strahlendiagramm gezeichnet, das sich aus der Theorie² für die gleichen Einschußparameter ergibt.

Die beiden Diagramme sehen sehr ähnlich aus. Ein wesentlicher Unterschied ist, daß beim Experiment die Schnittpunkte der Strahlen, die zu gleich großen positiven und negativen α -Werten gehören, mit wachsendem $|\alpha|$ deutlich zur Feldgrenze hin verschoben sind.

Das ist ein Hinweis auf die Existenz eines Bildfehlers 3. Ordnung, der in der bisherigen Theorie² außer Betracht blieb.

Man kann den Abstand $u'' r_0$ eines Seitenstrahles vom Mittelstrahl in der Entfernung $l'' r_0$ von der hinteren Feldgrenze durch eine Potenzreihe beschreiben:

$$\begin{aligned} u'' = & \alpha A_a + u A_u + \delta A_\delta \\ & + \alpha^2 A_{aa} + u^2 A_{uu} + \delta^2 A_{\delta\delta} \\ & + \alpha^3 A_{aaa} + u^3 A_{uuu} + \delta^3 A_{\delta\delta\delta} \\ & + \alpha u A_{au} + \alpha \delta A_{a\delta} + u \delta A_{u\delta} \\ & + \text{weitere Glieder 3. Ordnung} + \dots . \end{aligned} \quad (3)$$

Hierbei ist α der Winkel des Seitenstrahles vor dem Felde gegen den Mittelstrahl, $u r_0$ die radiale Einschußkoordinate in der Entfernung $l' r_0$ vor dem Kondensator und δ die relative Energieabweichung, die ein Teilchen des Strahles vor dem Felde gegenüber der Energie $e U_0$ aufweist [$e U = e U_0 (1 + \delta)$; die Größen α , u und u'' sind in² mit α_0 , u_0 und u_5 bezeichnet]. Die einfach indizierten Koeffizienten A beschreiben die Abbildungseigenschaften des Zylinderkondensators in erster Näherung. Die doppelt und dreifach indizierten A sind die Bildfehlerkoeffizienten zweiter und dritter Ordnung.

Zur Bestimmung der Koeffizienten A wurden die Messungen so eingerichtet, daß zwei der Variablen α , u und δ so gut wie möglich gleich Null gesetzt wurden und jeweils die dritte von Null verschiedene Werte durchlief. Ist z. B. $u = \delta = 0$, so erhält man für bekannte Werte von l' und α_i ($i = 1, 2, \dots$) nach

Gl. (3) die Beziehung

$$u_i''(l'') = \alpha_i A_a + \alpha_i^2 A_{aa} + \alpha_i^3 A_{aaa}. \quad (4)$$

Die Ausgleichsgerade durch die Meßpunkte beschreibt den Strahlverlauf hinter der Austrittsfeldgrenze:

$$u_i'' = m_i + n_i l''. \quad (5)$$

Alle Koeffizienten der Gl. (3) kann man in der Form

$$\begin{aligned} A_k &= B_k + l'' C_k \\ (k = a, u, \delta, aa, uu, \dots). \end{aligned} \quad (6)$$

anschreiben.

Somit erhält man aus Gln. (4), (5) und (6) die Beziehungen

$$\begin{aligned} m_i &= \alpha_i B_a + \alpha_i^2 B_{aa} + \alpha_i^3 B_{aaa}, \\ n_i &= \alpha_i C_a + \alpha_i^2 C_{aa} + \alpha_i^3 C_{aaa}. \end{aligned} \quad (7)$$

Eine Meßreihe für einen festen Wert von l' umfaßte 14 Strahlen mit verschiedenen α -Werten.

Berechnet man dafür die Ausgleichsparabeln 3. Grades durch die experimentell erhaltenen Werte $m(\alpha)$ und $n(\alpha)$, so erhält man die bestangepaßten Werte für die Koeffizienten B und C in Gl. (7). Setzt man in Gl. (6) für l'' einen bestimmten Wert ein, so kann man mit den ermittelten B - und C -Werten auch die Koeffizienten A in Gl. (4) für diesen Spezialfall angeben. Man kann diese Werte auch aus dem Strahlendiagramm (Abb. 2 a) erhalten, wenn man die Abstände der Seitenstrahlen vom Mittelstrahl in der Entfernung l'' von der hinteren Feldgrenze ausmisst, als Funktion von α_i aufträgt und die Ausgleichsparabel ermittelt.

Interessiert man sich nur für die Bildfehlerkoeffizienten A_{aa} und A_{aaa} , so wählt man für l'' den Bildabstand in erster Näherung. Er ergibt sich aus der Bedingungsgleichung:

$$A_a = B_a + l'' C_a = 0. \quad (8)$$

Im Strahlendiagramm ist dieser Ort näherungsweise durch den Schnittpunkt der beiden Strahlen festgelegt, die zu den kleinsten Einschußwinkeln gehören. Die Abstände der anderen Seitenstrahlen vom Mittelstrahl sollen hier mit u_{if}'' bezeichnet werden. Die Bestimmung von A_{aa} und A_{aaa} erfolgt mittels Gln. (4) und (8) aus der Beziehung

$$u_{if}''(\alpha_i)/\alpha_i^2 = A_{aa} + \alpha_i A_{aaa}, \quad (9)$$

indem durch die Werte $u_{if}''(\alpha_i)/\alpha_i^2$ eine Ausgleichsgerade gelegt wird.

In analoger Weise können nach den hier beschriebenen Methoden die nur mit u bzw. nur mit δ indizierten Koeffizienten A in Gl. (3) aus entsprechenden Messungen ermittelt werden. Eine Methode zur Ermittlung der gemischt indizierten Koeffizienten wird im Anhang angegeben.

Beschreibung der Meßapparatur

Mit einer Fernfokuskathode⁷ wird ein schlankes Elektronenstrahlbündel erzeugt (Abb. 3). Durch eine heizbare Blende wird daraus ein feiner Strahl ($\phi = 0.1$ mm) ausgeblendet. Mit den beiden Paaren von gekreuzten Justierkondensatoren kann der Strahl so eingestellt werden, daß er senkrecht zur vorderen Feldgrenze auf der geometrischen Mittelbahn in den Zylinderkondensator einläuft. Dazu muß vorher sichergestellt werden, daß die heizbare Eintrittsblende und die einschwenkbare Kontrollblende auf einer Geraden liegen, die senkrecht auf der vorderen Feldgrenze des Sektorfeldes

steht und in die geometrische Mittelbahn zwischen den Elektroden einmündet. Diese Justierung erfolgte mit einem Justierfernrohr. Die Justierfehler waren sicher kleiner als 0,1 mm. Die Elektroden des Zylinderkondensators wurden mit großer Sorgfalt hergestellt und justiert. Die Fehler der Krümmungsradien sind kleiner als 0,01 mm, die Justiergenauigkeit liegt ebenfalls bei 0,01 mm.

Hinter dem Sektorfeld befindet sich ein Meßmikroskop mit einem Leuchtschirm vor dem Objektiv. Das Mikroskop kann längs des Mittelstrahles durch eine Simmertammer verschoben werden. Ein Kreuztisch gestattet eine meßbare Verschiebung des Miskroskopes senkrecht zum Mittelstrahl. Dieser Kreuztisch besteht aus einer fein bearbeiteten Aluminiumplatte, die auf einem Dichtring aus Hostaflon unter Verwendung von Molybdänsulfid-Pulver ruckfrei mit Hilfe von Differenzschrauben in zwei Koordinatenrichtungen verschoben werden kann. Eine Umdrehung der Schraube bewirkt einen Vorschub von 0,25 mm. So kann der Abstand eines Seitenstrahles vom Mittelstrahl auf 0,01 mm genau gemessen werden.

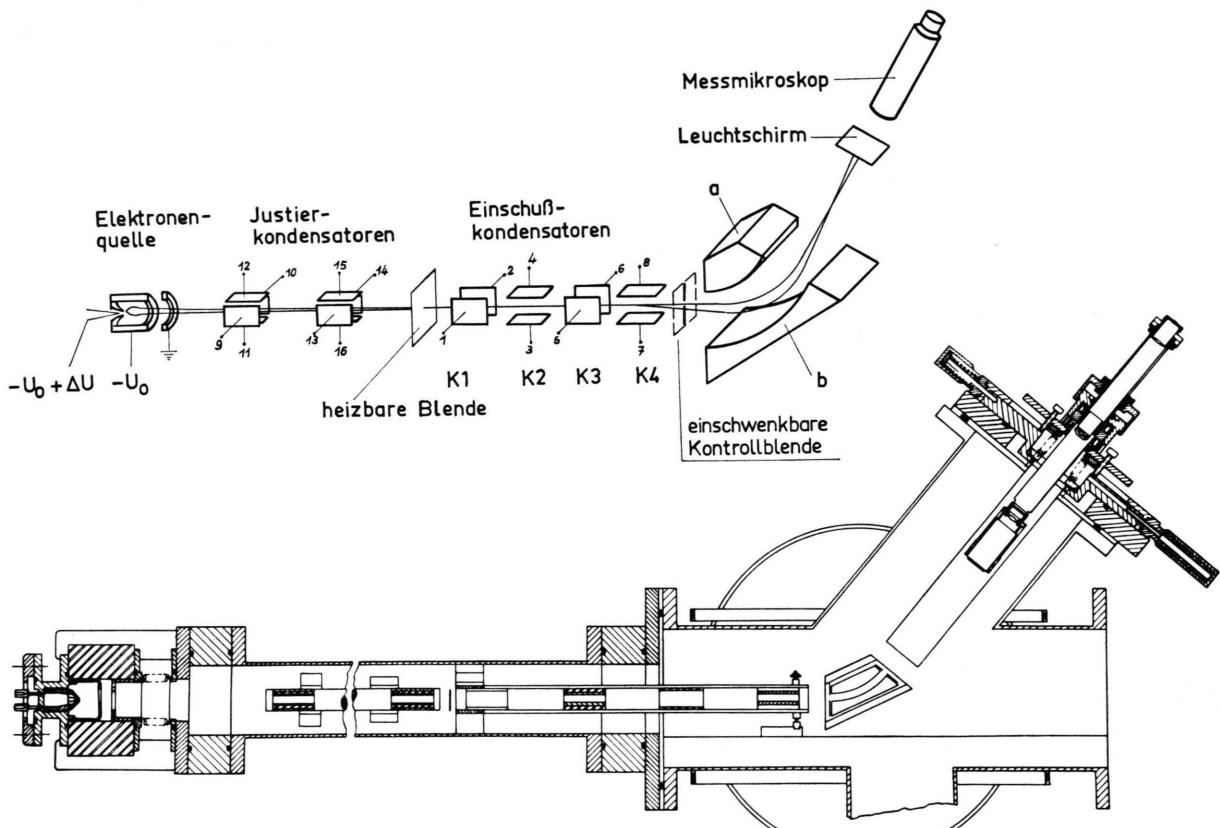


Abb. 3. Meßapparatur. a) Schematische Darstellung. b) Schnittzeichnung.

⁷ F. W. BRAUKS, Optik 15, 242 [1958].

Der Widerstand der Potentiometer 1–16 ist je $500\text{ k}\Omega$. Die übrigen Widerstandswerte sind in $\text{k}\Omega$ angegeben.

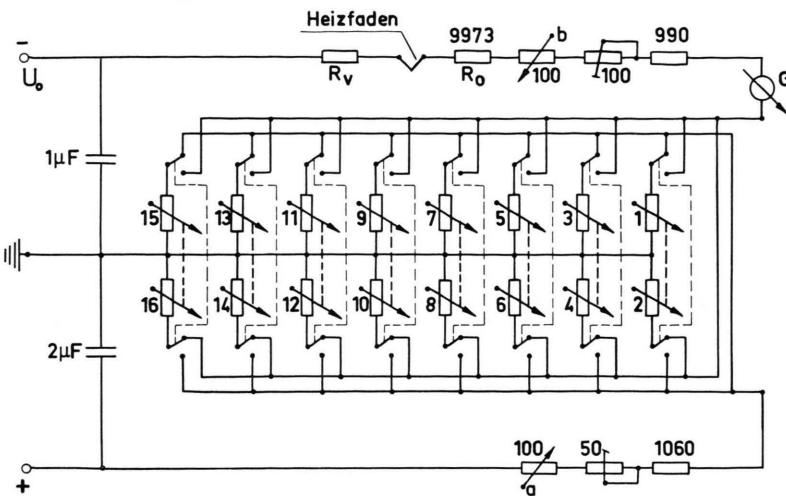


Abb. 4. Spannungsteiler. Die Potentiometer 1–16 und a, b versorgen die entsprechend bezeichneten Elektroden in Abb. 3.

Die Spannungsversorgung erfolgte aus *einem* Hochspannungsgerät über einen sorgfältig ausgemessenen Spannungsteiler. Die Potentiale an den Justier- und Einschusskondensatoren und an den Zylinderelektroden konnten mit Wendelpotentiometern (1–16, a, b) genau und reproduzierbar eingestellt werden (s. Abb. 3 a und Abb. 4). Die Winkelablenkung des Strahles durch die Einschusskondensatoren K 2 und K 4 wurde durch Eichmessungen festgestellt. So kann man durch geeignete Einstellung der zu K 2 und K 4 gehörigen Heliopots die Einschussparameter l' und α sowie δ einstellen. Die Einstellung der δ -Werte geschieht durch die Potentiometer a und b. Die Potentiale der Zylinderelektroden werden bei konstanter Beschleunigungsspannung U_0 so eingestellt, daß die Feldstärke E_0 auf der geometrischen Mittelbahn einer etwas verschiedenen Beschleunigungsspannung $U = U_0(1 + \delta)$ entspricht.

Das Erdmagnetfeld wird auf den geradlinigen Teilen des Strahlenganges durch Mu-Metallrohre abgeschirmt. Im Bereich des Sektorfeldes ist es durch Helmholtz-Spulen soweit kompensiert, daß die magnetische Feldstärke an keinem Ort der Bahn größer als 0,01 Oe ist.

Die hier beschriebene Methode liefert um so bessere Ergebnisse, je besser die beiden Forderungen erfüllt sind, daß der Apparat genau justiert und der Strahl während der Messung völlig stabil ist. Die zweite Forderung war trotz des Ausheizens der Eintrittsblende vor jeder Meßreihe nicht voll erfüllt. Durch die einschwenkbare Kontrollblende wurde die Position des Mittelstrahles während einer Meßreihe öfter nachgeprüft und, wenn nötig, mit den Justierkondensatoren nachjustiert. Der Grund für diesen störenden Effekt kann nicht mit Sicherheit angegeben werden. Er ist wohl in elektrischen Aufladungen von adsorbierten Kohlenwasserstoffsschichten an Blenden und Elektroden zu suchen.

Ergebnisse und Fehlerabschätzung

Abb. 5 zeigt einen Vergleich der theoretisch² abgeleiteten (ausgezogene Geraden) und der hier experimentell erhaltenen Abhängigkeiten von B_α und

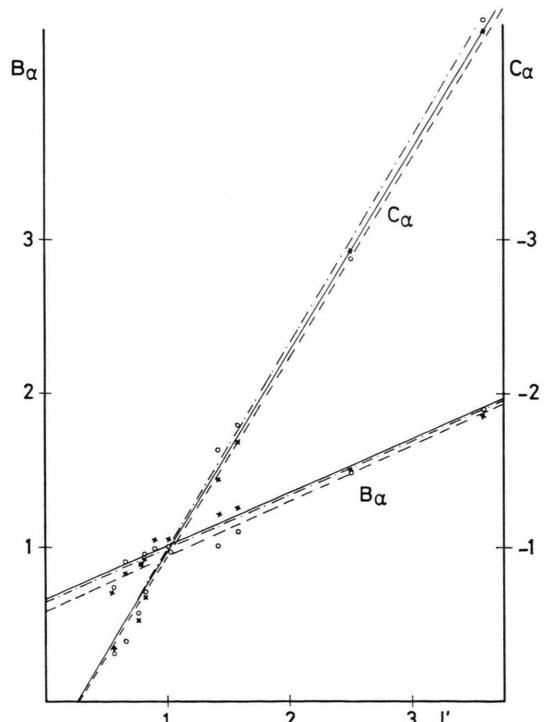


Abb. 5. Theoretischer (—) und nach zwei verschiedenen Auswertungsmethoden experimentell erhalten Verlauf von B_α und C_α .

C_a von der Dingweite l' . Die mit (\times) bezeichneten Punkte sind Mittelwerte für B_a bzw. C_a , die sich ergeben, wenn man alle ohne Wiederholung möglichen Dreierkombinationen aus den gemessenen Strahlen bildet und nach Gl. (7) die B - und C -Werte berechnet. Die daraus ermittelten Ausgleichsgeraden sind gestrichelt gezeichnet. Die mit (\circ) bezeichneten Punkte ergaben sich nach Berechnung der Ausgleichsparabeln dritten Grades aus der Gesamtheit der experimentell erhaltenen Werte von $m(a)$ und $n(a)$. Die zugehörigen Ausgleichsgeraden sind strichpunktiert gezeichnet.

Die Ergebnisse der Bildfehlermessungen für die Koeffizienten A_{aa} und A_{aaa} sind in Abb. 6 darge-

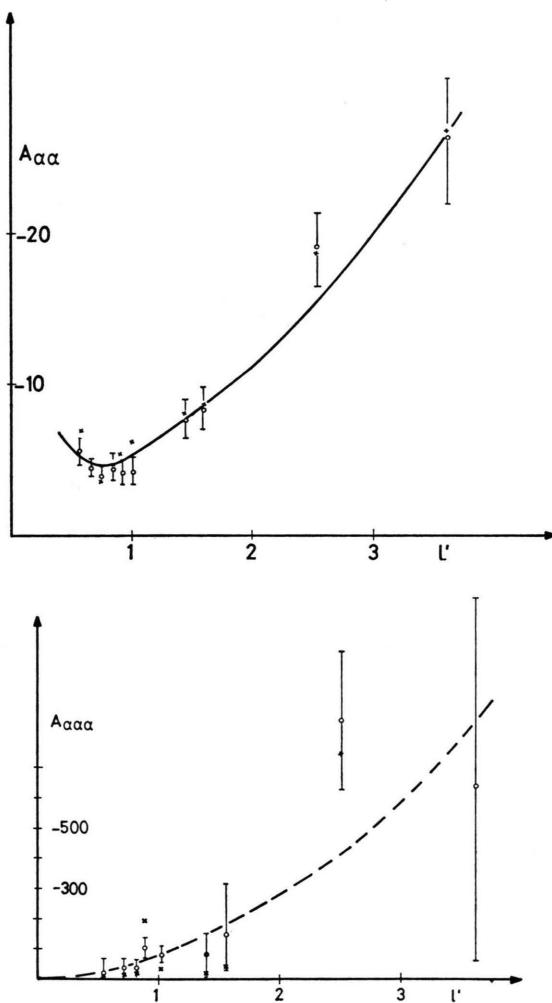


Abb. 6. Öffnungsfehler. a) Die ausgezogene Kurve gibt den theoretischen Verlauf² von A_{aa} an. b) Die gestrichelte Kurve zeigt den nach den Meßergebnissen vermuteten Verlauf von A_{aaa} .

stellt. Die ausgezogene Kurve in Abb. 6 a stellt den nach² theoretisch zu erwartenden Verlauf von $A_{aa}(l')$ dar. Die gestrichelte Kurve in Abb. 6 b zeigt den vermuteten Verlauf von $A_{aaa}(l')$.

Die mit (\circ) eingezeichneten Punkte und die zugehörigen mittleren Fehler wurden nach Gl. (9) aus den entsprechenden Strahldiagrammen durch Ausgleichsrechnung erhalten. Die mit (\times) bezeichneten Punkte wurden aus den aus Gl. (7) erhaltenen B - und C -Werten berechnet, indem für l'' die experimentell aus Gl. (8) erhaltene Bildweite in Gl. (6) eingesetzt wurde.

Die Ergebnisse der Messungen, bei denen parallele Strahlen eingeschossen wurden (Variationen von u) oder δ variiert wurde, sind in der folgenden Tabelle zusammengestellt (die mit u und δ indizierten Koeffizienten sind unabhängig von l'):

Tab. 1.

	Theorie	Experiment
B_u	0.347	0.35 ± 0.05
C_u	-1.31	-1.29 ± 0.06
A_{uu}	-1.56	0.1 ± 1.07
A_{uuu}	-	-10 ± 40
B_δ	0.336	0.34 ± 0.04
C_δ	0.675	0.64 ± 0.03
$A_{\delta\delta}$	-0.076	-2 ± 1.7
$A_{\delta\delta\delta}$	-	1 ± 10

Die hier angegebenen experimentellen Werte und mittleren Fehler wurden aus fünf bzw. vier Meßreihen gewonnen. Die Fehlerangaben sind jedoch mit gewisser Skepsis zu betrachten, da sie unter der Voraussetzung gewonnen wurden, daß rein statistische Schwankungen der Meßwerte vorliegen. Diese Voraussetzung ist sicher nicht streng erfüllt. Bei der Beschreibung der Methode wurde stets vorausgesetzt, daß zwei der Einschußparameter u , α und δ Null sein sollen und einer variiert wird. Das ist in voller Strenge natürlich nicht zu verwirklichen. Wegen der begrenzten Justiergenauigkeit muß man annehmen, daß z. B. bei der Messung der α -Bildfehler u und δ nur innerhalb einer Fehlergrenze von ± 0.001 gleich Null sind. Da die Abstände der Seitenstrahlen vom reellen Mittelstrahl gemessen werden, kann sich ein konstanter Justierfehler in u oder δ nur über die gemischt indizierten Bildfehlerkoeffizienten [vgl. Gl. (3)] bemerkbar machen. Bei α -Bildfehlermessungen kann man die daraus auf der Bildseite maximal resultierende systematische Verfälschung in der Lage der Seitenstrahlen bezüglich des Mittelstrahles zu 0.03 mm abschätzen.

Eine noch weniger exakt faßbare Fehlerquelle liegt in der nicht erreichten völligen Stabilität des Strahles. Wegen der langsamten Schwankungen des Strahles während der Messungen können die Einschlußparameter verfälscht werden. Abb. 2 a zeigt auch, daß die Streuung der Meßwerte deutlich größer ist, als man auf Grund der Meßgenauigkeit des Mikroskopos erwarten sollte. Wenn man die Verringerung der Meßgenauigkeit zum größten Teil auf die Schwankungen des Strahles zurückführt, so müßte man über die mittleren Fehler der Größen m und n , die sich bei der Berechnung der Ausgleichsgeraden aus den Meßwerten ergeben, zu einer realistischeren Abschätzung des Fehlers kommen können. Nach Gl. (7) kann man aus den zugehörigen Werten m_i , n_i , a_i bzw. u_i oder δ_i die Koeffizienten B und C berechnen. Setzt man nun für einen Strahl eines Strahlentripels die um Δm und Δn verfälschten Werte ein, während man für die anderen beiden Strahlen die theoretischen Werte verwendet, so ändern sich auch die B - und C -Werte. Setzt man für Δm und Δn mittlere Werte ($\Delta m = 0,0006$, $\Delta n = 0,0008$) ein, wie sie sich bei der Berechnung der experimentellen Ausgleichsgeraden $u'' = m + l'' n$ ergeben, so erhält man folgende abgerundete Werte für die daraus zu erwartenden Änderungen der Größen B und C :

ΔB_x	ΔB_{xx}	ΔB_{xxx}	ΔC_x	ΔC_{xx}	ΔC_{xxx}
0.11	5.6	100	0.14	7.6	130

x steht hier für α , u oder δ .

Aus den ΔB - und ΔC -Werten kann man nach Gl. (6) die ΔA -Werte für einen bestimmten Wert von l'' berechnen. Die Fehler, die sich so errechnen, übersteigen die auf statistischem Wege gewonnenen Fehler um fast eine Größenordnung.

Der Grund dafür liegt offenbar darin, daß bei dieser Abschätzung unter Verwendung nur eines Strahlentripels Maximalwerte der Größen ΔB und ΔC gewonnen werden. In Wirklichkeit steht aber eine größere Anzahl von Strahlentripeln zur Verfügung, die bei entsprechender Mittelbildung eine Verkleinerung der Fehler ergeben, sofern diese statistischer Natur sind. Die wahren Fehler der gemessenen Bildfehlerkoeffizienten liegen daher wohl näher bei den in den Abb. 5 und 6 und in Tab. 1 angegebenen Werten.

Herrn Prof. Dr. H. EWALD verdanke ich die Anregung zu der vorliegenden Arbeit sowie die Möglichkeit zu ihrer Durchführung. Für seine Unterstützung durch Rat und Kritik möchte ich meinen Dank aussprechen.

Anhang

Die Koeffizienten A in Gl. (3) sind Funktionen von l' und l'' , von Φ in Form von trigonometrischen Funktionen und von I , einem Streufeldintegral², das von der Ausdehnung der Streufelder abhängt.

Bei einer beträchtlichen Steigerung der Meßgenauigkeit könnte man aus den experimentell bestimmten Ordinatenabschnitten und Steigungen der Austrittsstrahlen die „allgemeinen Bildfehlerkoeffizienten“² α und λ bestimmen, aus denen sich die Koeffizienten A sowie die Größen B und C aufbauen. Die Zusammenhänge sind in Tab. 2 gegeben:

Tab. 2.

$$\begin{aligned} A_\alpha &= B_\alpha + l'' C_\alpha = \alpha_\alpha + l' \alpha_u + l'' (\lambda_\alpha + l' \lambda_u), \\ A_u &= B_u + l'' C_u = \alpha_u + l'' \lambda_u, \\ A_\delta &= B_\delta + l'' C_\delta = \alpha_\delta + l'' \lambda_\delta; \\ A_{\alpha\alpha} &= B_{\alpha\alpha} + l'' C_{\alpha\alpha} = \alpha_{\alpha\alpha} + l' \alpha_{uu} + l'' \alpha_{uu} \\ &\quad + l'' (\lambda_{\alpha\alpha} + l' \lambda_{u\alpha} + l'' \lambda_{uu}), \\ A_{uu} &= B_{uu} + l'' C_{uu} = \alpha_{uu} + l'' \lambda_{uu}, \\ A_{\delta\delta} &= B_{\delta\delta} + l'' C_{\delta\delta} = \alpha_{\delta\delta} + l'' \lambda_{\delta\delta}; \\ A_{u\alpha} &= B_{u\alpha} + l'' C_{u\alpha} = \alpha_{u\alpha} + 2 l' \alpha_{uu} + l'' (\lambda_{u\alpha} + 2 l' \lambda_{uu}), \\ A_{\alpha\delta} &= B_{\alpha\delta} + l'' C_{\alpha\delta} = \alpha_{\alpha\delta} + l' \alpha_{u\delta} + l'' (\lambda_{\alpha\delta} + l' \lambda_{u\delta}), \\ A_{u\delta} &= B_{u\delta} + l'' C_{u\delta} = \alpha_{u\delta} + l'' \lambda_{u\delta}. \end{aligned}$$

Die mit u und δ indizierten Koeffizienten B und C sind mit den entsprechenden α - und λ -Werten identisch. Trägt man B_α und C_α in Abhängigkeit von l' auf, so erhält man α_α bzw. λ_α als Ordinatenabschnitte und α_u bzw. λ_u als Steigungen der Ausgleichsgeraden. Die Ausgleichsparabeln durch die für verschiedene Dingweiten l' erhaltenen $B_{\alpha\alpha}$ - und $C_{\alpha\alpha}$ -Werte sollten die Bestimmung der Größen $\alpha_{\alpha\alpha}$, α_{uu} und α_{uu} bzw. $\lambda_{\alpha\alpha}$, $\lambda_{u\alpha}$ und λ_{uu} gestatten. Die gemischt indizierten Koeffizienten B und C lassen sich aus zwei Meßreihen erhalten, bei denen jeweils einer der Einschlußparameter auf einem von Null verschiedenen Wert gehalten und der andere variiert wird. Wenn α als Index vorkommt, müssen Messungen bei verschiedenen Dingweiten l' vorgenommen und die α - und λ -Werte durch Ausgleichsrechnung bestimmt werden. Die Größen α_{uu} und $\alpha_{u\alpha}$ bzw. λ_{uu} und $\lambda_{u\alpha}$ treten mehrfach auf, so daß auch dadurch eine Kontrollmöglichkeit gegeben ist.

Zur Bestimmung der gemischt indizierten B - und C -Werte muß nach Gl. (3) die Kenntnis der Größen, die in den ersten sechs Zeilen von Tab. 2 aufgeführt sind, als bekannt vorausgesetzt werden. Solange diese Größen nicht exakter bestimmt werden, als es hier geschehen ist, ist auch eine zuverlässige Bestimmung der Bildfehlerkoeffizienten mit gemischten Indizes zunächst nicht möglich. Es ist daher ein Experiment in Vorbereitung, bei dem die Meßgenauigkeit um eine Größenordnung gesteigert werden soll.